Proceedings of IAM, V.11, N.2, 2022, pp.113-119

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ И ФИЛЬТРОВ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ГАУССОВОЙ ЗАДАЧИ В УСТАНОВИВШИМСЯ РЕЖИМЕ*

М.М. МУТАЛЛИМОВ[1,2], Н.Г.ДЖАВАДОВ[3], У.З.РАСУЛОВА[4], Н.И.ВЕЛИЕВА[1], Ф.А. АЛИЕВ[1,2]

[1] Институт Прикладной Математики, Бакинский Государственный Университет, Баку, Азербайджан

[2]Институт Информационных Технологии, Баку, Азербайджан

[3]Национальное Аэрокосмическое Агентство Азербайджана, Баку, Азербайджан

[4]Азербайджанский архитектурно-строительный университет, Баку, Азербайджан

e-mail: mmutallimov@yahoo.com

Абстракт. В работе рассматривается задача построения оптимальных регуляторов и фильтров для линейно-квадратичной гауссовой (ЛКГ) задачи в установившимся режиме. Для нахождения управляющего воздействия решается две задачи – линейно-квадратичная детерминированная задача и линейно-квадратичное гауссовое оценивание, получаемое фильтром Калмана-Бьюси. В обоих случаях коэффициенты детерминированного регулятора и фильтра находятся с помощью положительно-определенных решений соответствующих матричных алгебраических уравнений Риккати.

Ключевые слова. ЛКГ задача, детерминированный регулятор, оптимальный фильтр Калмана-Бьюси, матричные алгебраические уравнения Риккати, установившейся режим.

AMS Subject Classification: 60G15, 93E11.

1. Введение.

Как известно [2, 22, 12], что решение многих задач техники, экономики, нефтедобычи, робототехники и др. сходятся к решению линейно-квадратичной гауссовой задачи на бесконечном интервале времени (принцип стохастической эквивалентности) [8, 10]. Несмотря на то, что эти задачи на бесконечном интервале времени подробно описаны для непрерывного случая [5], в дискретном случае такие результаты не получены. В данной заметке рассматривается дискретный вариант ЛКГ задачи на бесконечном интервале времен и, в котором решение этой задачи сводится к нахождению положительно определенных решений двух матричных алгебраических уравнений Риккати.

---

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 20.12.2022

2. Постановка задачи.

Рассмотрим следующую дискретную ЛКГ задачу. Пусть движение объекта описывается уравнение

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i + \omega_i, \tag{1}$$

и во временном состоянии i проводится измерения z_i, которые линейно связаны с состоянием траектории x_i

$$z_i = H x_i + v_i \tag{2}$$

где ω_i - вектор случайных внешних возмущений, а υ_i- вектор случайных погрешностей измерений, которые предполагаются гауссовыми случайными величинами типа «белый шум». Кроме того, как в [8] математические ожидания для случайных величин x_0, ω_i и υ_i имеют вид

$$E(\omega_i) = E(v_i) = E(x_0) = 0 \tag{3}$$

а корреляционные матрицы определены в виде

$$E\left\{\begin{bmatrix}\omega_i\\ v_i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_j^T v_j^T\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & R\end{bmatrix}\delta_{ij} \tag{4}$$

$$E\{x_0 x^T\} = P_0,\ E\{x_0 v_j^T\} = E\{x_0 \omega_j^T\} = 0 \tag{5}$$

Требуется найти такое управляющее воздействие u_i как функция от наблюдения z_i, которое минимизирует квадратичный функционал

$$J = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\begin{bmatrix}x_i^T u_i^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & N\\ N & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_i\\ u_i\end{bmatrix}\right\} \tag{6}$$

Отметим, что непрерывный случай аналогичной ЛКГ задачи решен в работе [5].

3. Решение задачи.

Решение дискретной ЛКГ задачи (1)-(6) будем искать в виде

$$u_i = -C\hat{x}_i \tag{7}$$

где C матричный коэффициент, а $S-$ решение системы обратной связи алгебраических матричных уравнений Риккати

$$C = (\Gamma^T S \Gamma + B)^{-1}(\Gamma^T S \Phi + N^T) \tag{8}$$

$$S = \Phi^T S \Phi - C^T(B + \Gamma^T S \Gamma)C + A \tag{9}$$

Далее отметим, что K является матричный коэффициент, а M- решение следующей системы алгебраических матричных уравнений Риккати

$$K = MH^T(HMH^T + R)^{-1} \tag{10}$$

$$M = \Phi P \Phi^T + Q \tag{11}$$

$$P = M - K(HMH^T + R)K^T \tag{12}$$

Действительно, подставляя (10) в (12) получим

$$P = M - MH^T(HMH^T + R)^{-1}(HMH^T + R)(HMH^T + R)^{-1}HM^T =$$

$$= M - MH^T(HMH^T + R)^{-1}HM^T$$

Затем полученное это выражение для P подставляя в (11) имеем следующее матричное алгебраическое уравнение Риккати относительно M

$$M = \Phi M \Phi^T - \Phi M H^T(HMH^T + R)^{-1}HM^T\Phi^T + Q \tag{13}$$

Далее, решая уравнения (9) и (13) относительно S и M , а после этого находим C и K. После определения u_i используя фильтра Калмана-Бьюси [3] мы можем найти оценку $\hat{x}_i$ в виде

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K(z_i - H\bar{x}_i) \tag{14}$$

$$\bar{x}_{i+1} = \Phi \hat{x}_i + \Gamma u_i \tag{15}$$

Подставив (15) в (14) имеем

$$\hat{x}_i = P\hat{x}_{i-1} + \Gamma u_{i-1} + K[z_i - H(\Phi\hat{x}_{i-1} + \Gamma u_{i-1})] =$$

$$= \Phi\hat{x}_{i-1} + \Gamma u_{i-1} + Kz_i - KH\Phi\hat{x}_{i-1} - KH\Gamma u_{i-1} =$$

$$= [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_{i-1} + [\Gamma - KH\Gamma]u_{i-1} + Kz_i$$

Другими словами, для оценки имеем

$$\hat{x}_{i+1} = [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_i + [\Gamma - KH\Gamma]u_i + Kz_{i+1}, \ \ \hat{x}_0 = 0 \tag{16}$$

Учитывая (7) в (1) получим

$$x_{i+1} = \Phi x_i - \Gamma C \hat{x}_i \tag{17}$$

а из (16)

$$\hat{x}_{i+1} = [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_i + (\Gamma - KH\Gamma)u_i + K[Hx_{i+1} + v_{i+1}]=$$

$$= [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_i + [\Gamma - KH\Gamma]u_i + KH[\Phi x_i + \Gamma u_i + w_i] +$$

$$+Kv_{i+1} = [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_i + \Gamma u_i + KH\Phi x_i + KH\omega_i + Kv_{i+1} =$$

$$= [\Phi - KH\Phi]\hat{x}_i + KH\Phi x_i + KH\omega_i + Kv_{i+1} \quad (18)$$

Далее, перепишем (1) и (18) в следующем виде:

$$x_{i+1} = \Phi x_i - \Gamma C\hat{x}_i + \omega_i \quad (19)$$

$$\hat{x}_{i+1} = [\Phi - KH\Phi - \Gamma C]\hat{x}_i + KH\Phi x_i + KH\omega_i + Kv_{i+1} \quad (20)$$

и отсюда получим следующую замкнутую систему разностных уравнений

$$\begin{cases} x_{i+1} - \Phi x_i + \Gamma C\hat{x}_i = \omega_i \\ \hat{x}_{i+1} - [\Phi - KH\Phi - \Gamma C]x_i - KH\Phi x_i = KH\omega_i + Kv_{i+1} \end{cases} \quad (21)$$

Нетрудно видеть что характеристический определитель $\Delta(z)$ замкнутой системы (21) запишется в виде

$$\Delta(z) = det\begin{bmatrix} Ez - \Phi & \Gamma C \\ -KH\Phi & Ez - (\Phi - KH\Phi - \Gamma C) \end{bmatrix} =$$

$$det\begin{bmatrix} Ez - \Phi + \Gamma C & \Gamma C \\ Ez - \Phi + \Gamma C & Ez - \Phi + KH\Phi + \Gamma C \end{bmatrix} =$$

$$= det\begin{bmatrix} Ez - \Phi + \Gamma C & \Gamma C \\ 0 & Ez - \Phi + KH\Phi \end{bmatrix} =$$

$$= det(Ez - \Phi + \Gamma C) \cdot det(Ez - \Phi + KH\Phi) \quad (22)$$

Здесь задача состоит в том, что следует найти C и K таким образом, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчива. Другими словами, корни z уравнения $\Delta(z) = 0$ должны лежать внутри единичного круга, где это обеспечиваются с выбором положительно определенных решений уравнения S и M из (9) и (13) соответственно [5].

4. Алгоритм нахождение оптимальной оценки.

Как показано выше, решение ЛКГ задачи (1)-(6) находится с помощью соотношений (7) и (14)-(15). Здесь основным является нахождение матричных коэффициентов C и K из (8)-(12). Для получения значений этих матриц необходимо найти положительно-определенных решений [5, 8] матричных алгебраических уравнений Риккати (9) и (13) и существуют различные алгоритмы [1, 2, 4, 6, 7, 9]. Сейчас приведем алгоритм для решения (1)-(6) и нахождения оценки $\hat{x}_i$.

Алгоритм.

1. Формируются матрицы $\Phi, \Gamma, H, Q, R, A, B, N$.
2. Решается МАУР (9) и находится положительно-определенное решение - матрица S.

3. Решается МАУР (13) и находится положительно-определенное решение – матрица M .

4. Формируются матрицы C из (8) и K из (10).

5. Определяется оптимальная оценка $\hat{x}_i$ из (16) и оптимальный регулятор u_i из (7).

Как видно из алгоритма, центральным местом в этом методе является нахождение положительно-определенных решений МАУР, для которых существуют многочисленные методы вычислительные алгоритмы [1,2, 4-7] и используя их можно найти решение МАУР из пункта 2 и 3.

Заключение. С помощью положительно-определенных решений двух матричных уравнений Риккати восстанавливается коэффициенты регулятора обратной связи и фильтра Калмана-Бьюси. Приводится вычислительный алгоритм.

Литература

1. Aliev F.A., Larin V.B. Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, 1998, 272p.
2. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators/ Outskirts Press, 2022, 412 p.
3. Kalman R. E., Bucy R. S. New results in linear filtering and prediction theory / Trans. ASME, J. Basic Eng., 1961, 83 (1), p. 95–108.
4. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку, Elm, 1989, 320 с.
5. Алиев Ф.А., Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления / Киев: Наукова Думка, 1978, 327 с.
6. Алиев Ф.А.,Бордюг Б.А.,Ларин В.Б. H2-оптимизация и метод пространства состояний в задаче синтеза оптимальных регуляторов. Баку, Элм, 1991, 326 с.
7. Алиев Ф.А.,Бордюг Б.А.,Ларин В.Б. Спектральный метод решения матричных алгебраических уравнений Риккати //Докл. АН СССР, 1987, 292:4, с.783–788.
8. Брайсон А.,Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления / М.: Мир, 1972. 544 с.
9. Велиева Н.И, Агамалиева Л.Ф., Ханбабаева М.Г. Высокоточный алгоритм решения многомерной задачи синтеза систем стабилизации при внешних возмущениях, Proceedings of IAM 3 (1), сс.98-104
10. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления / М.: Мир, 1977, 656 с.

11. Муталлимов М.М., Алиев Ф.А. Методы решения задач оптимизации при эксплуатации нефтяных скважин. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, 2012, 164 с.
12. Черноусько Ф.Л.Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях / М.: Наука, 1978, 351 с.

ALGORITHM FOR CONSTRUCTION OF OPTIMAL REGULATORS AND FILTERS FOR A DISCRETE LINEAR-QUADRATIC GAUSSIAN PROBLEM IN A STEADY MODE

M.M. MUTALLIMOV [1,2], N.G.JAVADOV [3], U.Z.RASULOVA [4], N.I.VELIEVA [1], F.A. ALIEV[1,2]

[1] Institute of Applied Mathematics, BSU, Baku, Azerbaijan
[2]Institute of Information Technology, ANAS, Baku, Azerbaijan
[3]Azerbaijan National Aerospace Agency, Baku, Azerbaijan
[4] Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, Azerbaijan
e-mail: mmutallimov@yahoo.com

Absract. The paper considers the problem of constructing optimal controllers and filters for a linear-quadratic Gaussian (LQG) problem in steady state. To find the control action, two problems are solved - a linear-quadratic deterministic problem and a linear-quadratic Gaussian estimation obtained by the Kalman-Bucy filter. In both cases, the coefficients of the deterministic controller and filter are found using positive-definite solutions of the corresponding matrix algebraic Riccati equations.

Keywords. LQG problem, deterministic controller, optimal Kalman-Bucy filter, Riccati matrix algebraic equations, steady state.

References

1. Aliev F.A., Larin V.B., Optimization of linear control systems: Analytical methods and computational algorithms, Amsterdam: Gordon and Breach, (1998), 272p.
2. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I., Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators/ Outskirts Press, (2022), 412 p.
3. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory / Trans. ASME, J. Basic Eng., Vol.83, No.1, (1961), pp.95–108.
4. Aliev F.A., Metody reshenija prikladnyh zadach optimizacii dinamicheskih sistem. Baku, Elm, (1989), 320 s.(Aliev F.A. Methods for solving applied problems of optimization of dynamic systems. Baku, Elm, (1989), 320 p.)
5. Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suncev V.N. Optimizacija linejnyh invariantnyh vo vremeni sistem upravlenija / Kiev: Naukova Dumka, (1978), 327 s. (Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.N.

Optimization of linear time-invariant control systems / Kyiv: Naukova Dumka, (1978), 327 p.)

6. Aliev F.A., Bordjug B.A., Larin V.B., N2-optimizacija i metod prostranstva sostojanij v zadache sinteza optimal'nyh reguljatorov. Baku, Jelm, (1991), 326 s.(Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., H2-optimization and state-space method in the problem of synthesis of optimal controllers. Baku, Elm, (1991), 326 p.)
7. Aliev F.A., Bordjug B.A., Larin V.B., Spektral'nyj metod reshenija matrichnyh algebraicheskih uravnenij Rikkati //Dokl. AN SSSR, Vol.292, No.4, (1987), s.783–788.(Aliev F.A., Bordyug B.A., Larin V.B., Spectral method for solving matrix algebraic Riccati equations, Dokl. AN SSSR, Vol.292, No.4, (1987), pp.783–788)
8. Brajson A., Ho Ju Shi., Prikladnaja teorija optimal'nogo upravlenija / M.: Mir, (1972), 544 s.(Bryson A., Ho Yu Shi. Applied Theory of Optimal Control, M.: Mir, (1972), 544 p.)
9. Velieva N.I, Agamalieva L.F., Hanbabaeva M.G. , Vysokotochnyj algoritm reshenija mnogomernoj zadachi sinteza sistem stabilizacii pri vneshnih vozmushhenijah, Proceedings of IAM, Vol.3, No.1, s.98-104 (Velieva N.I., Agamalieva L.F., Khanbabaeva M.G., High-precision algorithm for solving a multidimensional problem of synthesis of stabilization systems under external disturbances, Proceedings of IAM, Vol.3, No.1, pp.98-104)
10. Kvakernaak H., Sivan R. Linejnye optimal'nye sistemy upravlenija, M.: Mir, (1977), 656 s.(Kvakernaak H., Sivan R. Linear optimal control systems, M.: Mir, (1977), 656 p.)
11. Mutallimov M.M., Aliev F.A., Metody reshenija zadach optimizacii pri jekspluatacii neftjanyh skvazhin. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, (2012), 164 s.(Mutallimov M.M., Aliev F.A., Methods for solving optimization problems in the operation of oil wells. Saarbrücken (Deutscland): LAP LAMBERT, (2012), 164 p.)
12. Chernous'ko F.L., Kolmanovskij V.B., Optimal'noe upravlenie pri sluchajnyh vozmushhenijah , M.: Nauka, (1978), 351 s. (Chernousko F.L. Kolmanovsky V.B. Optimal control under random disturbances, M.: Nauka, 1978, 351 s.)